Stanisław T. Czuba
Anna Zalewska

RPBP III.24/C.13

PRZEPROWADZENIE EKSPERYMENTU W ZAKRESIE WYKORZYSTANIA MIZARA 4 DO NAUCZANIA TEORII MNOGOSCI I TOPOLOGII.

W roku akademickim 1986/87 był prowadzony wykład monograficzny z topologii dla IV roku matematyki. Celem tego wykładu było przedstawienie wybranego działu topologii continuów, który studenci mieli zapisywać w języku Mizar 4. Wykład początkowo obejmował podstawowe własności zwartości, spójności, pewne twierdzenia mówiące o continuach. Następnie wykład zawierał partię materiału dotyczącą zbiorów spójnych nieprzywiedlnych na zawieranie dwóch punktów oraz continuów nieprzywiedlnych na zawieranie dwóch punktów. W końcowej fazie wykładu omawiane były continua nierozkładalne i dziedzicznie nierozkładalne. Do w/w wykładu były przeprowadzane ćwiczenia (dwie godziny ćwiczeń na cztery godziny wykładu), na których studenci sami rozwiązywali zadania z list; zadania te zawierały niektóre fakty i twierdzenia pominięte na wykładzie.

Wykaz twierdzeń dotyczących spójności udowodnionych na wykładzie:

Twierdzenie 1. Jeśli $X = A \cup B$ oraz A i B są rozgraniczone, to $Cl(A) = A$ i $Cl(B) = B$, czyli zbiory A i B są otwarto-domknięte

Twierdzenie 2. Przestrzeń X jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy X i $\emptyset$ są jedynymi zbiorami otwarto-domkniętymi.

Twierdzenie 3. Przestrzeń X jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje podzbiór właściwy i niepusty A taki, że $Cl(A) \cap Cl(X \setminus A) = \emptyset$.

Twierdzenie 4. Jeśli zbiory A i B są rozgraniczone oraz $A_1 \subseteq A$ i $B_1 \subseteq B$, to zbiory A_1 i B_1 są rozgraniczone.

Twierdzenie 5. Jeśli zbiory A i B są rozgraniczone oraz A i C są rozgraniczone, to zbiory A i $B \cup C$ są rozgraniczone.

Twierdzenie 6. Jeśli zbiory A i B są oba domknięte lub oba otwarte, to zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$ są rozgraniczone.

Twierdzenie 7. Jeśli zbiór C jest spójny oraz $C \subseteq M \cup N$, gdzie zbiory M i N są rozgraniczone, to $C \subseteq M$ lub $C \subseteq N$.

Twierdzenie 8. Jeśli zbiory C i D są spójne i nie są rozgraniczone, to zbiór $C \cup D$ jest spójny.

Twierdzenie 9. Jeśli zbiór C jest spójny i $C \subseteq A \subseteq Cl(C)$, to A jest zbiorem spójnym.

Twierdzenie 10. Jeśli C jest spójnym podzbiorem przestrzeni spójnej X oraz $X \setminus C = M \cup N$, gdzie zbiory M i N są rozgraniczone, to zbiory $C \cup M$ i $C \cup N$ są spójne.

Wykaz twierdzeń dotyczących składowej punktu udowodnionych na wykładzie.

Twierdzenie 1. Każda składowa jest zbiorem spójnym.

Twierdzenie 2. Składowa jest maksymalnym zbiorem spójnym.

Twierdzenie 3. Każda składowa jest zbiorem domkniętym.

Twierdzenie 4. Dwie różne składowe są rozgraniczone.

Twierdzenie 5. Jeśli A jest spójnym podzbiorem przestrzeni spójnej X oraz C jest składową $X \setminus A$, to zbiór $X \setminus C$ jest spójny.

Twierdzenie 6. Ciągły obraz przestrzeni spójnej jest przestrzenią spójną.

Twierdzenie 7. Jeśli zbiór C jest spójny i $C \cap A \neq \emptyset \neq C \setminus A$, to $C \cap Fr(A) \neq \emptyset$.

Wykaz twierdzeń dotyczących zwartości udowodnionych na wykładzie:

Twierdzenie 1. Jeśli X jest przestrzenią Hausdorffa, $B \subseteq X$ oraz B jest zwart, to $B = Cl(B)$.

Twierdzenie 2. Każdy domknięty podzbiór przestrzeni zwartej jest zbiorem zwartym.

Twierdzenie 3. Ciągły obraz przestrzeni zwartej jest przestrzenią zwartą.

Twierdzenie 4. Niech $f: X \to Y$ będzie funkcją ciągłą, gdzie X jest przestrzenią zwartą a Y jest przestrzenią Hausdorffa. Wtedy:
a) funkcja f jest domknięta,
b) jeśli funkcja f jest różnowartościowa, to jest homeomorfizmem.

Twierdzenie 5. Każda przestrzeń metryczna i zwarta jest ośrodkowa.

Twierdzenie 6. Każda przestrzeń zwarta jest zupełna.

Twierdzenie 7. Każda przestrzeń metryczna, zwarta jest ograniczona.

Twierdzenie 8. Dla przestrzeni metrycznych zwartość jest równoważna przeliczalnej zwartości.

Wykaz twierdzeń dotyczących zbiorów spójnych nieprzywiedlnych na zawieranie dwóch punktów udowodnionych na wykładzie:

Oznaczmy przez I zbiór spójny nieprzywiedlny na zawieranie punktów a i b.

Twierdzenie 1. Jeśli A jest spójnym podzbiorem zbioru I oraz $a \in A$ lub $b \in A$, to $I \setminus A$ jest zbiorem spójnym.

Twierdzenie 2. Jeśli A jest niepustym i spójnym podzbiorem zbioru I takim, że $\{a,b\} \cap S = \emptyset$, to $I \setminus S = A \cup B$, gdzie zbiory A i B są niepuste, spójne i rozdzielone.

Twierdzenie 3. Jeśli zbiory A i B są spójnymi podzbiorami I takimi, że $a \in A \cap B$, to $A \subseteq B$ lub $B \subseteq A$.

Twierdzenie 4. Jeśli zbiór I jest spójny nieprzywiedlny między punktami a i b, to nie jest spójny nieprzywiedlny między żadną inną parą punktów.

Wykaz twierdzeń dotyczących continuów nieprzywiedlnych między dwoma punktami udowodnionych na wykładzie:

Oznaczmy przez C continuum nieprzywiedlne między punktami a i b, K - dowolne podcontinuum C.

Twierdzenie 1. Dla każdego rozkładu C na dwa właściwe podcontinua M i N (tzn. $C = M \cup N$) mamy $\{a,b\} \cap M \cap N = \emptyset$.

Twierdzenie 2. Zbiór $Cl(C \setminus K)$ jest continuum lub sumą dwóch continuów.

Twierdzenie 3. Jeśli $a \in K$, to $Cl(C \setminus K)$ jest continuum.

Twierdzenie 4. Jeśli K nie jest continuum brzegowym w C, to continuum A jest nieprzywiedlne między a i każdym punktem zbioru $K \cap A$.

Twierdzenie 5. Zachodzą następujące równości:

$C \setminus A = B \cup Int\ K$,

$Cl(Int\ K) = Cl(Cl(C \setminus A) \setminus B)$.

Twierdzenie 6. Zbiór $Cl(Int\ K)$ jest continuum.

Twierdzenie 7. Jeśli $a \in K$ oraz $Int\ K \neq \emptyset$, to $a \in Cl(Int\ K)$.

Twierdzenie 8. Niech K i L będą podcontinuami C zawierającymi a. Jeśli L nie jest podzbiorem K, to $Cl(Int\ K) \subseteq L$.

Twierdzenie 9. Jeśli C jest nieprzywiedlne między a i b oraz c i d, to C jest nieprzywiedlny między a i c lub a i d.

Wykaz twierdzeń dotyczących continuów nierozkładalnych udowodnionych na wykładzie:

Twierdzenie 1. Jeśli X jest continuum nierozkładalnym, K jest właściwym podcontinuum X, to $X \setminus K$ jest zbiorem spójnym.

Twierdzenie 2. (Z. Janiszewski) Continuum X jest nierozkładalne wtedy i tylko wtedy, gdy każde jedgo właściwe podcontinuum K jest brzegowe (tzn. $Cl(X \setminus K) = K$).

Twierdzenie 3. Jeśli continuum C nieprzywiedlne między punktami a i b zawiera podcontinuum nierozkładalne K, to albo K jest brzegowe w C albo K jest regularnym podcontinuum C.

Twierdzenie 4. Jeśli X jest continuum nierozkładalnym, to X nie jest przeliczalną sumą podcontinuów właściwych.

Twierdzenie 5. Jeśli continuum X jest metryczne i nierozkładalne, to kompozanta każdego punktu jest brzegowa.

Twierdzenie 6. Jeśli continuum X jest metryczne i nierozkładalne, to każde dwie różne kompozanty są rozłączne.

Twierdzenie 7. (Z. Janiszewski) Niech X będzie continuum Hausdorffa. X jest nierozkładalne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $K \subseteq X$ mamy $Cl(X \setminus K) = X$.

Twierdzenie 8. Jeśli continuum Hausdorffa X jest nierozkładalne i niezdegenerowane, to nie jest ono lokalnie spójne w żadnym punkcie.

Twierdzenie 9. Jeśli continuum Hausdorffa X jest nierozkładalne, to X ie jest przeliczalną sumą podcontinuów właściwych.

Twierdzenie 10. Niech X bedzie continuum metrycznym, nierozkladalnym. Wtedy:

a) jeśli $a \in X$, to $C(a)$ (kompozanta punktu a) jest zbiorem I kategorii,

b) jeśli $a \in X$, to $C(a)$ jest zbiorem brzegowym w X,

c) istnieją takie trzy punkty $a,b,c \in X$, że X jest nieprzywiedlne między każdą parą z nich.

Twierdzenie 11. Jeśli X jest continuum metrycznym, to następujące warunki są równoważne:

a) X jest nierozkładalne,

b) dla każdego $a \in X$ istnieje $x \in X$ takie, że X jest nieprzywiedlne między a i x,

c) istnieje takie $a \in X$, że $C(a)$ jest zbiorem brzegowym w X,

d) istnieją takie trzy punkty $a,b,c \in X$, że X jest nieprzywiedlne między każdą parą z nich.

Twierdzenie 12. Jeśli X jest continuum metrycznym, to X jest nierozkładalne wtedy i tylko wtedy, gdy X jest nieprzywiedlne między pewnym punktem $p \in X$ i każdym punktem $d \in D$ z pewnego zbioru D gęstego w X.

Twierdzenie 13. Jeśli X jest continuum metrycznym, to X jest nierozkładalne wtedy i tylko wtedy, gdy X zawiera dwie rozłączne kompozanty.

OPIS CWICZEN KOMPUTEROWYCH Z TOPOLOGII

Celem ćwiczeń komputerowych było przetestowanie systemu Mizar 4 pod względem możliwości wykorzystania go do nauczania topologii.

Praca studentów z systemem Mizar 4 polegała na zapisaniu w języku tego systemu twierdzeń i ich dowodów (przerobionych wcześniej na wykładzie lub pozostawionych do samodzielnego udowodnienia) i sprawdzeniu (z pomocą systemu Mizar 4) ich poprawności.

I GRUPA ZADAŃ.

Studenci rozpoczęli zajęcia od dowodzenia prostych twierdzeń i faktów dotyczących własności operacji domknięcia, zbiorów domkniętych i otwartych oraz wnętrza i ograniczenia zbioru. Pierwotnie, dla uproszczenia, jako przestrzeń topologiczną przyjęto zbiór X wraz z operatorem domknięcia (Kuratowskiego) określonym na każdym podzbiorze zbioru X. Opis środowiska (tzn. odpowiednie aksjomaty, deklaracje wprowadzanych obiektów i stałych, deklaracje używanych operacji i relacji) został przygotowany przez prowadzącego wykład i był następujący:

```
environ
mode Point;                    :: deklaracja obiektu: Point
definition
 func X -> set;                :: cała przestrzeń - X
 func O -> set;                :: zbiór pusty - O
end;
definition let A be set;
 func -A -> set;               :: operacja uzupełnienia zbioru (-)
 func Cl A -> set;             :: operator domknięcia (Cl)
 pred A is_open;               :: predykat: 'jest otwarty'
 pred A is_closed;             :: predykat: 'jest domknięty'
end;
```

```
definition let A,B be set;
 func A u B -> set;          :: operacja sumy zbiorów (u)
 func A n B -> set;          :: operacja iloczynu zbiorów (n)
 func A \ B -> set;          :: operacja różnicy zbiorów (\)
 pred A <= B;                :: predykat: 'jest zawarty w'
end;
definition let A be set, x be Point;
 pred x in A;                :: predykat: 'należy do'
end;
reserve x,y,z for Point;
reserve A,B,C for set;

Ext: for A,B st A<>B ex x st not(x in A iff x in B);
Union: for A,B,x holds x in A u B iff x in A or x in B;
Meet: for A,B,x holds x in A n B iff x in A & x in B;
Difference: for A,B,x holds x in A\B iff x in A & not x in B;
Complement: for A,x holds x in -A iff not x in A;
Inclusion: for A,B holds A<=B iff
                for x holds x in A  implies x in B;
Empty: not ex x st x in O;
Space: for x holds x in X;
                              :: Aksjomaty Kuratowskiego
Ax1: Cl(O)=O;
Ax2: for A holds A <= Cl(A);
Ax3: for A holds Cl(Cl(A))=Cl(A);
Ax4: for A,B holds Cl(A u B) = Cl(A) u Cl(B);
                              :: Definicja otwartosci i domknietosci
Closed: for A holds A is_closed iff A=Cl(A);
Open: for A holds A is_open iff -A is_closed;
begin
```

Studenci w trakcie wykonywania zadań uzupełniali i rozwijali powyższe środowisko stosownie do potrzeb dowodzonych twierdzeń. I tak nie zawiera on jeszcze dwóch deklaracji ważnych dla I grupy zadań, a mianowicie deklaracji operacji wnętrza zbioru A jako funkcji:

func Int A -> set;

deklaracji operacji ograniczenia zbioru A jako funkcji:

func Fr A -> set;

oraz deklaracji predykatu: 'is_closed_domain'.

Dla dowolnego zbioru A zdefiniowano jego wnętrze jako zbiór Int(A) równy Cl(-A), a jego ograniczenie jako zbiór Fr(A) równy Cl(A) n Cl(-A). Fakt, że zbiór A jest dziedziną domkniętą, zdefiniowano następująco:

A is_closed_domain wtedy i tylko wtedy, gdy A=CL(Int(A)).

II GRUPA ZADAŃ.

Ta grupa zadań dotyczyła spójności przestrzeni topologicznej. Zanim jednak studenci zaczęli wprowadzać odpowiednie pojęcia i definicje dotyczące spójności, przede wszystkim zmodyfikowano już istniejący opis środowiska..

Ponieważ, zgodnie z definicją, przestrzeń topologiczna jest parą złożoną ze zbioru (zwanego jej nośnikiem) i określonej na nim topologii, dlatego też zadeklarowano obiekt zwany przestrzenią topologiczną (**mode** TopSpace;), wprowadzając dla dowolnej przestrzeni topologicznej X jej nośnik (the-carrier_of X) jako funkcję:

func the_carrier_of X -> set;

Następnie rozgraniczono pojęcie obiektu należące do danego zbioru i pojęcie obiektu należącego do danej przestrzeni topologicznej, odpowiednio jako 'Element' i 'Point'. Punkty danej przestrzeni topologicznej X zadeklarowano jako elementy jej nośnika:

mode Point of X -> Element of the_carrier_of X;

Wprowadzenie do opisu środowiska obiektu będącego podzbiorem danego zbioru A (jako: set of Element of A) pozwoliło na zadeklarowanie podzbiorów danej przestrzeni topologicznej X jako podzbiorów jej nośnika:

mode subset of X -> subset of the_carrier_of X;

Ponieważ zbiór pusty i cały zbiór X często wygodnie traktować jako podzbiory przestrzeni topologicznej X, w związku z tym wprowadzono następujące definicje:

```
definition let X be TopSpace;
 func 0.X -> subset of X;
 func 1.X -> subset of X;
end;
```

i aksjomat:

```
for X being TopSpace holds 0.X=0 & 1.X=the_carrier_of X;
```

pozwalający (w zależności od potrzeby) na wymienne traktowanie zbioru pustego icałego zbioru X: jako obiektów będących zbiorami lub jako obiektów będących podzbiorami danej przestrzeni.

Mając tak zmodyfikowane środowisko, studenci przystąpili do wprowadzania pojęć dotyczących spójności. Na początek zadeklarowano dwa predykaty: 'sa_rozgr' oraz 'is_connected'. Fakt, że dwa podzbiory A,B danej przestrzeni topologicznej X są rozgraniczone, zdefiniowano następująco:

```
A,B sa_rozgr wtedy i tylko wtedy, gdy
                    (Cl(A) n B) u (A n Cl(B))=0.X.
```

Natomiast fakt, że podzbiór A przestrzeni topologicznej X jest spójny, zdefiniowano w następujący sposób:

```
A is_connected wtedy i tylko wtedy, gdy
  for P,Q being subset of X st P,Q sa_rozgr & A=P u Q
                           holds P=0.X or Q=0.X.
```

Pojęcie singletonu danego punktu x przestrzeni topologicznej X wprowadzono za pomocą deklaracji:

```
definition let X be TopSpace, x be Point of X;
 func sgl.x -> subset of X;
end;
```

a fakt, że dowolny punkt przestrzeni należy do singletonu danego punktu x, zdefiniowano za pomocą aksjomatu:

```
Sgl: for x,y being Point of X holds y in sgl.x iff y=x;
```

Zdefiniowanie składowej punktu x danej przestrzeni topologicznej X wymagało wprowadzenia dodatkowych pojęć, a mianowicie:

- obiektu będącego rodziną zbiorów przestrzeni X:

```
mode set_family of X -> set of subset of X;
```

- deklaracji operacji sumy takiej rodziny, jako funkcji:

```
func u.F -> subset of X;
```

i jej przecięcia, jako funkcji:

```
func n.F -> subset of X;
```

- aksjomatu definiującego sumę rodziny zbiorów danej przestrzeni topologicznej X:

```
Axfu: for F being set_family of X holds
        for x being Point of X holds x in u.F iff
        (ex A being subset of X st A in F & x in A);
```

aksjomatu definiującego przecięcie takiej rodziny:

```
Axfn: for F being set_family of X st F<>O.X holds
        for x being Point of X holds x in n.F iff
        (for A being subset of X st A in F holds x in A);
```

Wprowadzenie tych pojęć pozwoliło na zdefiniowanie składowej danego punktu x przestrzeni topologicznej X w następujący sposób:

dla dowolnego podzbioru A przestrzeni X zachodzi:

```
skl.x=A iff ex F being set_family of X st
        (for B being subset of X holds
            B in F iff x in B & B is_connected)
        & u.F=A;
```

deklarując wcześniej operacje składowej punktu x jako funkcje:

```
func skl.x -> subset of X;
```

III GRUPA ZADAŃ.

Ostatnią grupę stanowiły zadania dotyczące zwartości przestrzeni topologicznej. Prace studentów nad zadaniami z tej grupy są jeszcze nie zakończone. Aktualnie, podobnie jak przy rozwiązywaniu zadań z II grupy, uzupełniany jest opis środowiska o pojęcia dotyczące zwartości.

Ponieważ każdy podzbiór przestrzeni topologicznej można traktować jako podprzestrzeń, dlatego też wprowadzono dla dowolnego podzbioru A przestrzeni X następującą operację:

```
func /A -> SubSpace of X;
```

deklarując wcześniej:

```
mode SubSpace of X -> TopSpace;
```

Przestrzeń topologiczną X typu T2 zdefiniowano w następujący sposób:

```
X is_T2 wtedy i tylko wtedy,gdy
  for x,y being Point of X
   ex Ux,Vy being Subset of X st Ux is_open & Vy is_open
                              & x in Ux & y in Vy & Ux n Vy=O.X;
```

Podanie definicji zwartości przestrzeni topologicznej wymaga wcześniejszego wprowadzenia dodatkowych pojęć, takich jak pokrycie otwarte danej przestrzeni czy też podpokrycie skończone. Aktualnie pojęcia te są wprowadzane przez studentów do opisu środowiska.

ORGANIZACJA ĆWICZEŃ.

Zajęcia odbywały się na komputerze IBM PC/AT w formalnym wymiarze dwóch godzin tygodniowo. Faktycznie studentom zapewniono większą ilość godzin dostępu do komputera, co też zostało przez nich wykorzystane.

Każdy student wraz z plikiem właściwym (tzn. zawierającym tekst twierdzenia i jego dowodu) tworzył również plik zwany słownikiem prywatnym (o tej samej nazwie co plik właściwy, ale o rozszerzeniu DIC), w którym zapisane były symbole wszystkich relacji i operacji wprowadzonych przez studenta.
A oto przykład takiego słownika środowiska zamieszczonego przy opisie I grupy zadań:

```
O-
OCl
Ou
On
O\
Ris_open
Ris_closed
R<=
Rin
```

Litera 'O' ('R') na początku każdego wiersz oznacza, iż po niej następuje symbol wprowadzanej operacji (relacji).

Każdy z studentów miał do rozwiązania po kilka zadań z danej grupy. Początkowo przyjęto zasadę, iż tylko z twierdzeń i faktów wcześniej udowodnionych przez któregoś z studentów mogą korzystać pozostali wpisując samą treść twierdzenia do opisu środowiska. Jednak szybko okazało się, że to ograniczenie nie może dotyczyć prostych faktów z teorii mnogości (bardzo często wykorzystywanych przy udawadnianiu twierdzeń topologicznych) oczywistych dla studentów, a jednocześnie nieraz wymagających żmudnych dowodów. Dlatego też w opisie środowiska każdego zadania umieszczono te twierdzenia z teorii mnogości, które były wykorzystywane podczas rozwiązywania danego zadania.

Dla każdej grupy zadań został utworzony specjalny plik -archiwum, do którego sukcesywnie dopisywane były twierdzenia wraz z poprawnymi już dowodami. Opiekę nad plikiem - archiwum powierzono jednemu ze studentów, którego zadaniem było dbanie między innymi o odpowiednią kolejność umieszczanych twierdzeń jak również jednolitość wprowadzonych przez studentów operacji oraz relacji.

WNIOSKI.

Ćwiczenia komputerowe z topologii miały charakter eksperymentalny. Praca studentów z systemem Mizar 4 nie ograniczała się tylko do rozwiązywania podanych zadań, ale przede wszystkim polegała na opracowaniu odpowiedniej aparatury pojęciowej. Prawidłowy dobór wprowadzanych do środowiska operacji, definicji i aksjomatów odgrywa bowiem istotną rolę w efektywnym wykorzystaniu tego systemu do komputerowo wspomaganego nauczania matematyki.

Stosowanie Mizara pozwala studentom dokładniej zrozumieć sens i idee dowodów twierdzeń oraz strukturę wzajemnych powiązań pojęć topologicznych, a prowadzącym zajęcia precyzyjnie ocenić stopień opanowania materiału przez studentów.

Wydruki zadań studentów zamieszczone zostały poniżej.

Stanisław T. Czuba

Anna Zalewska